Ⓐ

Noen kommentarer

27/11-2012

KOROLLAR 3.2.18

Hvis A, B, C er tre distinkte punkter som er slik at $B \in \overrightarrow{AC}$, vil

$$A * B * C \iff AB < AC$$

(Legg merke til at vi antar at A, B, C er distinkte - dette er ikke med hos Venema, s. 42. Det er nemlig slik at $A = C$ ikke gir en definisjon av strålen $\overrightarrow{AC}$. Hvis $A = B$, vil $AB = 0 < AC$, men det er ikke riktig at $A * B * C$ fordi mellomliggenhet bare har mening når A, B, C er distinkte punkter. Se def. 3.2.3.)

BEVIS: (Ikke med hos Venema.)

$\Rightarrow$: Vi antar at $A * B * C$. Dette gir ut fra definisjonen av mellomliggenhet:

$$AB + BC = AC$$

Siden $BC > 0$ når $B \neq C$, følger det at

$$AB < AC.$$

$\Leftarrow$: Vi antar så at $AB < AC$.

Da $B \neq C$, p.g.a. ekte ulikhet - men også fordi vi forutsetter at A, B, C er distinkte. Siden $B \in \overrightarrow{AC}$, må vi da ha:

$$A * B * C \quad \text{eller} \quad A * C * B.$$

Det siste alternativet gir

$$AC + CB = AB,$$

som gir $AC < AB$, i strid med vår antagelse. Altså må:

$$A * B * C. \qquad \square$$

B

27/12 - 2012

KOROLLAR 3.2.20

Anta at $A \neq B$. Hvis $f: \overleftrightarrow{AB} \to \mathbb{R}$ er en koordinat-funksjon som er slik at:

$$f(A) = 0 \quad \text{og} \quad f(B) > 0,$$

vil $\overrightarrow{AB} = \{P \in \ell \mid f(P) \geq 0\}$

BEVIS (Oppg. 3.2, # 15, s. 46)

(a) Vi beviser først at

$$\overrightarrow{AB} \subseteq \{P \in \ell \mid f(P) \geq 0\}$$

Dersom $P \in \overrightarrow{AB}$ har vi fire muligheter:

(i) $P = A$; da vil $f(P) = f(A) = 0$.

(ii) $A * P * B$; da vil $f(P)$ ligge mellom $f(A)$ og $f(B)$. Altså må $f(P) > 0$; (Teorem 3.2.17)

(iii) $P = B$; da vil $f(P) = f(B) > 0$.

(iv) $A * B * P$; dette gir $0 = f(A) < f(B) < f(B)$ ut fra Teorem 3.2.17.

I alle tilfeller har vi at

$$P \in \{P \in \ell \mid f(P) \geq 0\}.$$

(b) Vi beviser deretter at:

$$\{P \in \ell \mid f(P) \geq 0\} \subseteq \overrightarrow{AB}.$$

Vi har da fire muligheter når vi antar at $f(P) \geq 0$.

(i) $f(P) = 0$. P.g.a. injektiviteten til f må da $P = A$.

(ii) $f(A) < f(P) < f(B)$. Da vil $A * P * B$ (Teorem 3.2.17)

(iii) $f(P) = f(B)$. Må ha $P = B$ p.g.a. injektiviteten.

(iv) $f(B) < f(P)$. Dette gir igjen $A * B * P$ (Teorem 3.2.17)

I alle fire tilfeller får vi at $P \in \overrightarrow{AB}$.